Exponentialfunktion als Sinus/Cosinus schreiben

Wenn eigentlich nur reelle $x(t)$ Lösungen von Schwingungsdifferentialgleichungen gesucht sind, dann darf man immer

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} = \tilde{A}\cos\omega t + \tilde{B}\sin\omega t$$

schreiben. Warum? Und wie hängen die Koeffizienten A, B mit $\tilde{A}, \tilde{B}$ zusammen?

Das wichtigste vorweg: Damit all dies Sinn ergibt, darf man nicht übersehen, dass $A, B \in \mathbb{C}$ sind ($\tilde{A}, \tilde{B}$ hingegen sind reell).

Möglichkeit 1: Nur Realteil der allgemeinen Lösung nehmen

Die einfachste Möglichkeit dies einzusehen, ist, einfach nur den Realteil von $x(t)$ als Lösung zu betrachten: Da die DGL linear ist, erfüllt immer auch der Realteil der allgemeinen Lösung alleine die DGL (da sich Realteilterme niemals mit Imaginärteiltermen rauskürzen können):

$$x(t) = \operatorname{Re} x(t) + i \operatorname{Im} x(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{Re}\ddot{x}(t) + i\operatorname{Im}\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 \operatorname{Re} x(t) - i\omega_0^2 \operatorname{Im} x(t)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \operatorname{Re}\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 \operatorname{Re} x(t).$$

Erfüllt $x(t)$ die DGL, tut dies also immer auch der Realteil $\operatorname{Re} x(t)$. Nehmen wir einfach nur den Realteil von $x(t)$, bekommen wir genau die Darstellung mit Sinus und Cosinus:[1]

$$\operatorname{Re} x(t) = \operatorname{Re}\big(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}\big) = \underbrace{\operatorname{Re}(A+B)}_{=:\tilde{A}}\cos\omega t + \underbrace{\operatorname{Re}(iA - iB)}_{=\operatorname{Im}(B-A)=:\tilde{B}}\sin\omega t, \qquad \operatorname{Re} iz = -\operatorname{Im} z.$$

Man beachte, dass $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ nun, wie gewünscht, reell sind.

Möglichkeit 2: Nur allgemeine Lösungen nehmen, deren Imaginärteil verschwindet

Man kann stattdessen auch „aktiv" nach Lösungen suchen, die keinen Imaginärteil haben. Fordern wir also

$$0 \overset{!}{=} \operatorname{Im} x(t) = \operatorname{Im}\big(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}\big) = \operatorname{Im}(A+B)\cos\omega t + \underbrace{\operatorname{Im}(iA - iB)}_{=\operatorname{Re}(A-B)}\sin\omega t \qquad \forall t.$$

Offensichtlich brauchen wir[2] $\operatorname{Im}(A+B) \overset{!}{=} 0 \overset{!}{=} \operatorname{Re}(A-B) \Leftrightarrow B \overset{!}{=} A^*$. Somit haben wir

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + A^*e^{-i\omega t} = \underbrace{(A + A^*)}_{=2\operatorname{Re} A =: \tilde{A}}\cos\omega t + \underbrace{i\underbrace{(A - A^*)}_{=2i\operatorname{Im} A}}_{=-2\operatorname{Im} A =: \tilde{B}}\sin\omega t.$$

---

[1] Wir verwenden hier immer wieder die Eulersche Formel $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ für $\varphi \in \mathbb{R}$.
[2] A^* ist die komplex konjugierte Zahl zu A.

Test der beiden Möglichkeiten mit Anfangsbedingungen

Die beiden Möglichkeiten liefern verschiedene Beziehungen zwischen den Koeffizienten. Welche der beiden Beziehungen ist korrekt?

Betrachten wir dazu die allgemeinsten möglichen Randbedingungen[3]

$$x(t_1) = x_1, \qquad \dot{x}(t_2) = v_2.$$

Für die exponentielle Lösung folgen aus ihnen

$$x(t_1) = Ae^{i\omega t_1} + Be^{-i\omega t_1} = x_1, \qquad \dot{x}(t_2) = i\omega\left(Ae^{i\omega t_2} - Be^{-i\omega t_2}\right) = v_2$$

$$\Longrightarrow \qquad A = \frac{x_1 e^{i\omega t_1} - i\frac{v_2}{\omega}e^{i\omega t_2}}{e^{2i\omega t_1} + e^{2i\omega t_2}}, \qquad B = \frac{x_1 e^{-i\omega t_1} + i\frac{v_2}{\omega}e^{-i\omega t_2}}{e^{-2i\omega t_2} + e^{-2i\omega t_1}} = A^*.$$

Wenn x_1 und v_2 reell sind, folgt also bereits automatisch $B = A^*$, was gleichbedeutend damit ist, dass die exponentielle Lösung durch diese Randbedingungen automatisch reell ist. Wir sehen bereits jetzt, dass aufgrund dieser Eigenschaft die beiden Beziehungen zwischen den Koeffizienten identisch sind:

$$\tilde{A} = \mathrm{Re}(A + B) = 2\,\mathrm{Re}\,A, \qquad \tilde{B} = \mathrm{Im}(B - A) = -2\,\mathrm{Im}\,A.$$

Nun müssen wir nur noch überprüfen, ob wir die korrekten Koeffizienten bekommen; wir bekommen nämlich

$$\tilde{A} = 2\,\mathrm{Re}\,A = \frac{x_1 \cos\omega t_2 - \frac{v_2}{\omega}\sin\omega t_1}{\cos\big(\omega(t_1 - t_2)\big)}, \qquad \tilde{B} = -2\,\mathrm{Im}\,A = \frac{x_1 \sin\omega t_2 + \frac{v_2}{\omega}\cos\omega t_1}{\cos\big(\omega(t_1 - t_2)\big)}.$$

Diese Koeffizienten erfüllen tatsächlich wie gewünscht die Randbedingungen

$$x(t_1) = \tilde{A}\cos\omega t_1 + \tilde{B}\sin\omega t_1 = x_1, \qquad \dot{x}(t_2) = -\omega\tilde{A}\sin\omega t_2 + \omega\tilde{B}\cos\omega t_2 = v_2,$$

wie man sich leicht durch Einsetzen der Formeln für $\tilde{A}, \tilde{B}$ unter Zuhilfenahme der Additionstheoreme überzeugen kann.

---

[3] Najaaaaa, es sind tatsächlich nicht die *allgemeinsten* möglichen Randbedingungen, schließlich genügen zur Bestimmung der Koeffizienten auch zwei Orte $x(t_1), x(t_2)$, zwei Geschwindigkeiten $\dot{x}(t_1), \dot{x}(t_2)$ oder ggf. auch höhere Ableitungen zu zwei verschiedenen Zeitpunkten. Es muss nicht zwingend ein Ort und eine Geschwindigkeit sein.
Nehmen wir etwa zwei Orte, $x(t_1) = x_1$ und $x(t_2) = x_2$ bekommen wir

$$A = \frac{x_1 e^{i\omega t_1} - x_2 e^{i\omega t_2}}{e^{2i\omega t_1} - e^{2i\omega t_2}}, \qquad B = \frac{x_1 e^{-i\omega t_1} - x_2 e^{-i\omega t_2}}{e^{2i\omega t_1} - e^{2i\omega t_2}} = A^*.$$

Erneut gilt also $B = A^*$; es entstehen durch diese andere Wahl der Randbedingungen keinerlei neue Komplikationen.